Rappel Mathématique

Microéconomie 3-851-84

I. Fonctions à une seule variable

- **QUELQUES RÈGLES DE DÉRIVATION (rappel)**

1. Multiplication de deux fonctions

$$\frac{d}{dx}(u \bullet v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Exemple: $u = x^2$
$v = 2x + 1$

$$\frac{d}{dx}[x^2 \bullet (2x+1)] = x^2 \bullet 2 + (2x+1) \bullet 2x$$

$$= 2x^2 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x$$

2. Division de deux fonctions

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \bullet \frac{du}{dx} - u \bullet \frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

Exemple: $u = x^2$
$v = 2x + 1$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2x+1}\right) = \frac{(2x+1) \bullet 2x - x^2(2)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{4x^2+2x-2x^2}{(2x+1)^2} = \frac{2x^2+2x}{(2x+1)^2}$$

3. Règle de chaîne

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = \frac{d}{du}[f(u)] \bullet \frac{du}{dx}$$

Exemple: $u = 2x+1$, $f(u) = u^2$

$$\frac{d}{dx}[(2x+1)^2] = 2(2x+1) \bullet 2 = 4(2x+1)$$

- **OPTIMISATION (sans contrainte)**

Soit $f(x)$ la fonction que l'on cherche à optimiser.

Condition de premier ordre (CPO) : $\frac{d}{dx}[f(x^*)] = 0$ (condition nécessaire)

Condition de second ordre (CSO) : $\frac{d^2}{dx^2}[f(x^*)] < 0$ pour un maximum

: $\frac{d^2}{dx^2}[f(x^*)] > 0$ pour un minimum.

- **FONCTIONS CONCAVES, QUASI CONCAVES, CONVEXES, QUASI CONVEXES**

Les théories du consommateur et du producteur que nous allons étudier font référence à des fonctions d'utilité et de production sur lesquelles certaines hypothèses sont faites. Ces hypothèses reposent, entre autres, sur les notions de concavité et de convexité des fonctions.

<u>Définition</u>:

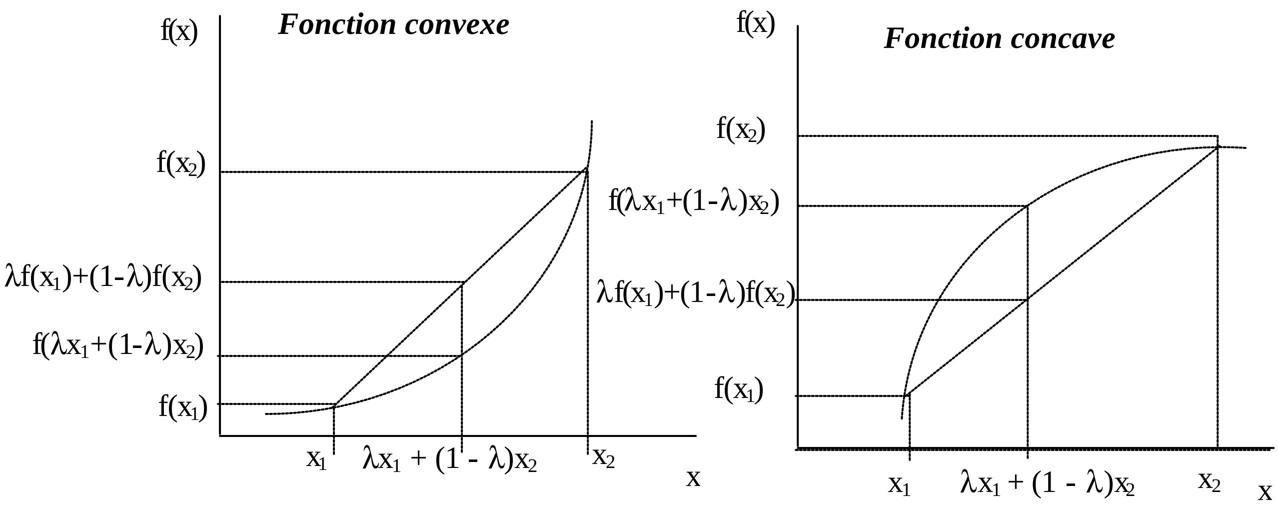
Une fonction ***f(x)*** est une fonction convexe si, pour tous points x_1, x_2 de son domaine et pour tout $\lambda, 0 < \lambda < 1$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

(Une fonction est <u>strictement</u> convexe si la dernière inégalité est stricte, à savoir, $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$).

Similairement, une fonction concave est définie de la même manière mais le sens de l'inégalité est renversé.

Exemples:



<u>Définition</u>:

Une fonction ***f(x)*** est quasi convexe si, pour tous points $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{x_2}$ de son domaine, on a

$$f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq f(x_2)$$

$0<\lambda<1$

ou, de manière équivalente:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \max\{f(x_1), f(x_2)\}$$

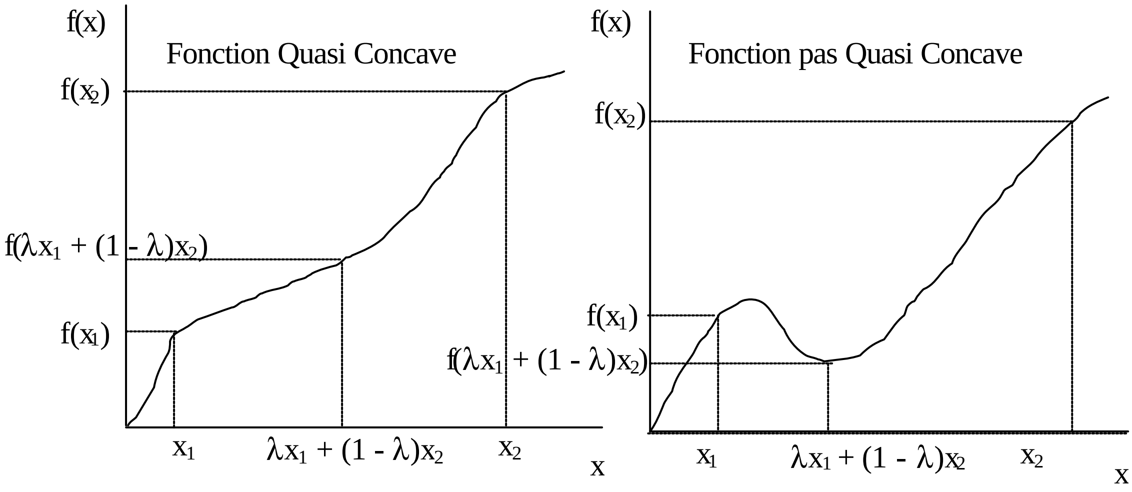
Similairement ***f(x)*** est quasi concave si

$$f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq f(x_1)$$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\}$$

ou, de manière équivalente:

Exemples:

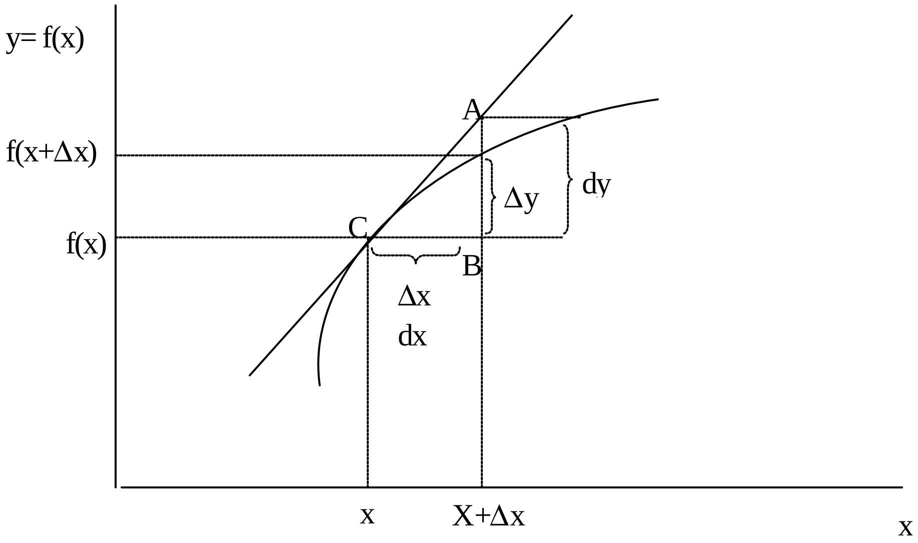


- **DIFFÉRENTIELLE TOTALE**

Soit $y = f(x)$.

Alors $dy = f'(x)\,dx$ est la différentielle totale et on a $\boldsymbol{dy} \neq \Delta \boldsymbol{y}$, i.e. ***dy*** est une approximation de $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Graphiquement:



$$dy = f'(x)\,dx = \textit{pente de la tangente en x} \bullet dx$$

$$= \frac{AB}{CB} \bullet CB = AB$$

$$AB = dy \approx \Delta y\,.$$

II. Fonctions à deux ou plusieurs variables

- **DÉRIVÉES PARTIELLES**

Les fonctions avec lesquelles nous allons travailler sont, en général, continues, dérivables et ont des dérivées partielles de premier ordre et de second ordre qui sont continues. Il faut donc savoir les calculer leurs dérivées partielles et aussi les interpréter

$\rightarrow$ *Exemples de fonctions usuelles :*

$$u = x_1^{1/3} x_2^{2/3}$$

$$u = 2\ell n x + 3\ell n y$$

$\rightarrow$ Calcul des dérivées partielles

Exemple : Soit la fonction de production :

$$Q = 36KL - 2K^2 - 3L^2$$

$\frac{\partial Q}{\partial L} = 36K - 6L$ (dérivée partielle de premier ordre par rapport à L)

$\frac{\partial Q}{\partial K} = 36L - 4K$ (dérivée partielle de premier ordre par rapport à K)

$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial Q}{\partial L}\right) = -6$ (dérivée partielle de second ordre par rapport à L)

$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} = \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial Q}{\partial K}\right) = -4$ (dérivée partielle de second ordre par rapport à K)

$\frac{\partial^2 Q}{\partial L \partial K} = \frac{\partial}{\partial L}\left(\frac{\partial Q}{\partial K}\right) = \frac{\partial}{\partial K}\left(\frac{\partial Q}{\partial L}\right) = \frac{\partial^2 Q}{\partial K \partial L} = 36$ (dérivée partielle croisée de second ordre)

$\rightarrow$ Les principales règles de dérivation s'appliquent :

1. Produit de deux fonctions

$$\frac{\partial}{\partial x}(u \bullet v) = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(u \bullet v) = u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}$$

Exemple: $u = x^2$

$$v = 2x + y$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 \bullet (2x+y)\right] = x^2 \bullet 2 + (2x+y) \bullet 2x$$

$$= 2x^2 + 4x^2 + 2xy = 6x^2 + 2xy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x^2 \bullet (2x+y)\right] = x^2 \bullet 1 + (2x+y) \bullet 0 = x^2$$

2. Quotient de deux fonctions

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \bullet \frac{\partial u}{\partial x} - u \bullet \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \bullet \frac{\partial u}{\partial y} - u \bullet \frac{\partial v}{\partial y}}{v^2}$$

Exemple: $u = x^2$

$v = 2x + y$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2x+y}\right) = \frac{(2x+y) \bullet 2x - x^2 \bullet 2}{(2x+y)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 2xy - 2x^2}{(2x+y)^2} = \frac{2x^2 + 2xy}{(2x+y)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{2x+y}\right) = \frac{(2x+y) \bullet 0 - x^2 \bullet 1}{(2x+y)^2} = \frac{-x^2}{(2x+y)^2}$$

3. Règle de chaîne

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f(u)\right] = \frac{d}{du}\left[f(u)\right] \bullet \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[f(u)\right] = \frac{d}{du}\left[f(u)\right] \bullet \frac{\partial u}{\partial y}$$

Exemple: $u = 2x + y, \quad f(u) = u^2$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(2x+y)^2\right] = 2(2x+y) \bullet 2 = 4(2x+y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[(2x+y)^2\right] = 2(2x+y) \bullet 1 = 2(2x+y)$$

- **DIFFÉRENTIELLE TOTALE**

Soit $Z = f(x, y)$.

Alors $$dZ = \frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x_o, y_o)}{\partial y} \cdot dy$$ est une approximation de

$$\Delta Z = f(x_o + \Delta x, y_o + \Delta y) - f(x_o, y_o),$$

i.e., $dZ \cong \Delta Z$

Évidemment, plus les variations Δx et Δy seront petites, meilleure sera l'approximation.

Exemple : $z = f(x, y) = 3xy + x \quad ; \; (x_0, y_0) = (2,2) \quad ; \; dx = 0{,}5$ et $dy = 0{,}3$

$$\begin{aligned}
\Delta z &= f(x_0 + dx, y_0 + dy) - f(x_0, y_0) \\
&= f(2{,}5 \;,\; 2{,}3) - f(2 \;,\; 2) \\
&= (3 \bullet 2{,}5 \bullet 2{,}3 + 2{,}5) - (3 \bullet 2 \bullet 2 + 2) \\
&= 19{,}75 - 14 = 5{,}75
\end{aligned}$$

$$dz = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\ dx + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\ dy$$

$$= (3y+1)[(x_0, y_0)]\ dx + 3x[(x_0, y_0)]\ dy$$

$$= 7 \bullet 0{,}5 + 6 \bullet 0{,}3 = 3{,}5 + 1{,}8 = 5{,}3$$

- **HOMOGÉNÉITÉ DES FONCTIONS**

Définition:

Une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est homogène de degré ***r*** si et seulement si pour tout

$$l > 0,\ f(l x_1, l x_2, \dots, l x_n) = l^r f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Exemple: $f(x, y, z) = 2x^3 + yz^2 - z^3$

$$f(lx, ly, lz) = 2(lx)^3 + (ly)(lz)^2 - (lz)^3$$

$$= 2l^3x^3 + l^3yz^2 - l^3z^3$$

$$= l^3(2x^3 + yz^2 - z^3)$$

$$= l^3 f(x, y, z)$$

f est homogène de degré 3.

Théorème d'Euler:

Une fonction $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est homogène de degré ***r ssi***

$$r\, f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \bullet x_i.$$

Exemple: $f(x,y,z) = 2x^3 + yz^2 - z^3$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = 6x^2 ; \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = z^2 ; \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = 2yz - 3z^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} \bullet x + \frac{\partial f}{\partial y} \bullet y + \frac{\partial f}{\partial z} \bullet z &= 6x^2 \bullet x + z^2 \bullet y + (2yz - 3z^2) \bullet z \\ &= 6x^3 + 3yz^2 - 3z^3 \\ &= 3(2x^3 + yz^2 - z^3) \\ &= 3f(x,y,z) \end{aligned}$$

f est homogène de degré 3.

- **FORMES QUADRATIQUES**

On peut déterminer si une fonction est convexe ou concave grâce au comportement de la forme quadratique associée à sa matrice hessienne (la matrice des dérivées secondes de la fonction). Voyons tout d'abord quelques définitions et quelques exemples.

Une forme quadratique est une fonction de ***n*** variables qui peut être écrite de la façon suivante :

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

où les a_{ij} sont des constantes.

En termes de matrices, la forme quadratique s'écrit:

$\boldsymbol{x'Ax}$ où $\boldsymbol{x}$ est un vecteur de dimension $\boldsymbol{n \times 1}$

et $\boldsymbol{A}$ une matrice symétrique $\boldsymbol{n \times n}$.

Exemple:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 2x_3^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix}}_{x'} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0{,}5 & 2 \\ 0{,}5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}}_{x}$$

<u>Définition</u>:

Une forme quadratique $x'Ax$ est dite <u>définie positive</u> si $x'Ax > 0, \ \forall \, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

<u>Définition</u>:

Une forme quadratique $x'Ax$ est dite <u>semi-définie positive</u> si $x'Ax > 0$ et s'il existe $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ pour lequel $x'Ax = 0$

Note : Pour des formes quadratiques définies négatives ou semi-définies négatives, les définitions sont similaires sauf en ce qui concerne les inégalités qui doivent alors être renversées (< 0).

<u>Théorème de Sylvester</u>:

i) Une forme quadratique $x'Ax$ est **définie positive** si et seulement si tous les principaux mineurs successifs de la matrice $\boldsymbol{A}$ sont positifs (i.e. > **0**).

ii) Une forme quadratique $x'Ax$ est **définie négative** si et seulement si tous les principaux mineurs successifs de la matrice ***A*** alternent en signe, le premier étant positif (i.e. **> 0**).

Illustration du théorème :

Soit ***A*** la matrice 3×3 suivante:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Les principaux mineurs successifs de ***A*** sont les trois déterminants suivants:

$$a_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

(les principaux mineurs successifs de ***A*** sont les déterminants des sous-matrices de ***A*** obtenues en enlevant successivement la dernière colonne de droite et la rangée d'en bas).

La forme quadratique $x'Ax$ est donc **définie positive** si chacun de ces trois déterminants est positif. Elle sera **définie négative** si ces déterminants alternent en signe, en commençant par : $a_{11} < 0$, puis $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0$, etc…

Exemple:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$a_{11} = 2 > 0;\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 > 0;\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 13 > 0$$

$x'Ax$ est définie positive.

Remarque :

i) Cependant, pour déterminer si une forme quadratique est **semi-définie positive,** il ne suffit pas que les principaux mineurs successifs soient non négatifs (i.e. ≥ **0**). Il faut que tous les mineurs principaux soient non négatifs, ce qui implique le calcul de plusieurs déterminants. Par exemple, dans le cas de A la matrice 3×3 vue plus haut, il faut vérifier que :

$$a_{11} \geq 0,\ a_{22} \geq 0,\ a_{33} \geq 0;\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0,\ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0;\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0.$$

ii) Pour déterminer si une forme quadratique est **semi-définie négative**, il faut que tous les mineurs principaux d'ordre impair soient non positifs (i.e. ≤ 0) et que tous les mineurs principaux d'ordre pair soient non négatifs (i.e. ≥ 0). Par exemple, dans le cas de A la matrice 3×3 vue plus haut, il faut vérifier que :

$$a_{11} \leq 0,\ a_{22} \leq 0,\ a_{33} \leq 0;\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \geq 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0,\ \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \geq 0;\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \leq 0.$$

Théorème :

i) Une fonction $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est **convexe** si et seulement si sa matrice hessienne H (ou la forme quadratique associée $x'Hx$) est **semi-définie positive**. Si $x'Hx$ est définie positive, $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est strictement convexe.

ii) De la même manière, si $x'Hx$ est **semi-définie négative**, la fonction $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est **concave** (et strictement concave si $x'Hx$ est définie négative).

Exemple 1: Soit $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2$

$$\frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_1} = -2x_1 - 2x_2; \qquad \frac{\partial f(x_1,x_2)}{\partial x_2} = -2x_1 - 6x_2;$$

$\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2}$ = -2; $\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2}$ = -6; $\dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 x_2} = \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2 x_1} = -2$, de sorte que:

la matrice hessienne $H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_1 x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f(x_1,x_2)}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$

Or, -2 < 0 et $|H| = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix}$ = 8> 0, ce qui implique que la forme quadratique $x' Hx$ est définie négative et la fonction $f(x_1, x_2) = -x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2$ est strictement convexe.

Exemple 2 : Soit $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_3 - x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + 3x_3^2$

$f_1 = 2x_1 + x_3$; $f_2 = -1 + 2x_2 + x_3$; $f_3 = x_1 + x_2 + 6x_3$

$f_{11} = 2$; $f_{12} = 0$; $f_{13} = 1$;

$f_{21} = 0$; $f_{22} = 2$; $f_{23} = 1$;

$f_{31} = 1$; $f_{32} = 1$; $f_{33} = 6$, de sorte que la matrice hessienne

$$H = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

On vérifie facilement que:

$$f_{11} = 2 > 0; \quad \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad et \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0.$$

Ainsi, la forme quadratique est $x'Hx$ est définie positive et la fonction

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_3 - x_2 + x_2^2 + x_2x_3 + 3x_3^2$$

est strictement convexe.

- OPTIMISATION AVEC CONTRAINTE

Méthode de Lagrange (présentée à l'aide d'un exemple)

Optimiser $f(x, y) = 3xy + x$ sous la contrainte que $g(x, y) = 8 - x - 2y = 0$,

où $f(x, y)$ mesure le rendement d'une terre,

x : la quantité de fertilisant

y : la quantité d'insecticide.

1. On forme une nouvelle fonction appelée le Lagrangien de la façon suivante :

$$L(x, y, l) = \quad f(x, y) \quad + \quad l \quad g(x, y)$$

= fonction objectif + multiplicateur × fonction contrainte
de Lagrange

$$L(x, y, l) = \quad 3xy \quad + \quad l \quad (8 - x - 2y)$$

Note : l'introduction du multiplicateur de Lagrange permet de transformer un problème d'optimisation **avec contrainte** à deux variables (x et y) en un problème d'optimisation **sans contrainte** à trois variables (x, y et l).

2. On optimise cette nouvelle fonction à 3 variables, i.e. le Lagrangien $L(x, y, l)$. Les conditions de premier ordre (CPO) s'écrivent :

$$\partial L / \partial x = \quad 3y + 1 - l = 0$$

$$\partial L / \partial y = \quad 3x \quad - 2l = 0$$

$$\partial L / \partial l = 8 - x - 2y \quad = 0$$

On solutionne ce système d'équations et on trouve (x^*, y^*, l^*) :

$$x^* = 26/6, \quad y^* = 11/6, \quad l^* = 39/6.$$

Note : En principe, à ce stade-ci, on doit calculer les conditions de second ordre (CSO) et vérifier si le point stationnaire (x^*, y^*, l^*) représente un minimum ou un maximum. Toutefois, en ce qui nous concerne, ce sont les propriétés de la fonction objectif (concave ou convexe) ou encore le contexte économique du problème posé qui déterminera la nature du point stationnaire.

III. Calcul matriciel

- **DÉFINITIONS**

$\rightarrow$ Vecteur : vecteur de dimension n : $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ Matrice : matrice d'ordre $n \times m$: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2m} \\ \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} \end{bmatrix}$

l'élément a_{ij} de la matrice A se trouve à la i$^{\text{ème}}$ ligne et j$^{\text{ème}}$ colonne.

- **NOTATION**

$$x' = [x_1, x_2, \quad , x_n] \quad \text{(vecteur ligne)}$$

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & & a_{n2} \\ & & & \\ a_{1m} & a_{2m} & & a_{nm} \end{bmatrix} \quad \text{(matrice transposée)}$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad \text{matrice identité.}$$

- **OPÉRATIONS**

$\rightarrow$ Addition

$\rightarrow$ Multiplication

Exemple :

$$\begin{bmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 & 22 & 16 \\ -3 & -8 & 5 & 2 \\ 6 & 12 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{3\times 2} \quad \times \quad B_{2\times 4} \quad = \quad C_{3\times 4}$$

Note : Pour que la multiplication des matrices puisse se faire, il faut que le nombre de colonnes de la matrice A soit égal au nombre de lignes de la matrice B.

$\rightarrow$ Produit scalaire : $[x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_i x_i y_i = \text{k}$

$$\rightarrow \quad xx' = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 & x_1 x_n \\ x_2 x_1 & x_2^2 & x_2 x_n \\ \\ x_n x_1 & x_n x_2 & x_n^2 \end{bmatrix}$$

matrice carrée $n \times n$

- **RÉSOUDRE UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS LINÉAIRES**

$A\,x = b$ où A est une matrice carrée d'ordre n

Il existe différentes méthodes :

$\rightarrow$ par substitution

$\rightarrow$ à l'aide de la matrice inverse :

$$x = A^{-1}\, b \quad \text{où} \quad A^{-1} = \frac{adj\ A}{|A|}$$

avec $adj\ A =$ matrice transposée des cofacteurs de A

note : 1) la matrice que l'on obtient à partir de A en supprimant sa i ième ligne et sa j ième colonne est notée A_{ij} ;

2) le (i,j) ième **mineur** de A ou le **mineur** associé à l'élément a_{ij} de A, noté M_{ij}, est le déterminant de la matrice A_{ij} : $M_{ij} = \det\ A_{ij}$;

3) le (i,j) ième cofacteur de A, noté C_{ij}, est le scalaire : $C_{ij} = (-1)^{i+j}\ M_{ij}$.

$\rightarrow$ par la règle de Cramer :

pour $A\,x = b$

$x_j = \dfrac{\Delta_j}{|A|}$ où Δ_j est le déterminant de la matrice que l'on obtient (à partir de A) en remplaçant la j ième colonne de A par b.

Exemple : soit $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1 x_3 - x_2 + x_2^2 + x_2 x_3 + 3x_3^2$. Touvons le min ou la max de cette fonction.

Les dérivées partielles de premier ordre sont données par :

$f_1 = 2x_1 + x_3$; $f_2 = -1 + 2x_2 + x_3$; $f_3 = x_1 + x_2 + 6x_3$

On en déduit les CPO :

$$f_1 = 2x_1 + x_3 = 0$$

$$f_2 = -1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$f_3 = x_1 + x_2 + 6x_3 = 0$$

qui peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En appliquant la règle de Cramer, on trouve la solution de ce système d'équations :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1}{20}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{11}{20}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2}{20}.$$

De plus, puisque la fonction $f(x_1, x_2, x_3)$ est strictement convexe (ceci a déjà été vérifié dans un exemple précedent), nous savons que :

$$x^* = \begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/20 \\ 11/20 \\ -2/20 \end{bmatrix}$$ est un minimum de la fonction $f(x_1, x_2, x_3)$.

- **PROPRIÉTÉS DES MATRICES**

$\rightarrow$ Matrice symétrique : $A = A'$, $\quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall\,(i, j)$

Exemple : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$\rightarrow$ matrices définies et semi-définies :

Soit A une matrice carrée. $x'\,A\,x$ donne une forme quadratique qui s'écrit :

$$x'\,A\,x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \quad [a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \ , \quad a_{12}x_1 + a_{22}x_2 \ ] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \quad a_{11}x_1^2 + a_{21}x_2 x_1 + a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$= \quad a_{11}x_1^2 + 2\, a_{12}x_1x_2 + a_{22}\, x_2^2 \, .$$

Rappel : la matrice A est définie positive si $x^{'} \ A\, x > 0 \quad \forall x \neq 0$.

Remarque : Parfois on ne veut pas que la propriété soit satisfaite pour toutes les valeurs de x , mais seulement pour des valeurs de x qui respectent une certaine contrainte, par exemple, $b\ x = 0.$

Exemple : On dira que la matrice A est définie positive sous la contrainte $b\ x = 0$, si

$$x^{'} \ A\, x > 0 \quad \forall x \quad et \quad les\ x\ tels\ que : b\ x = 0.$$

Exemple : La fonction f est strictement concave si sa matrice hessienne F satisfait la propriété :

$$x^{'} \ F \ x < 0 \quad \forall x \neq 0.$$

La fonction g est strictement quasi-concave si sa matrice hessienne G satisfait la propriété : $x^{'} \ G \ x < 0 \quad \forall x \quad et \quad les\ x\ tels\ que \left[\dfrac{\partial g}{\partial x}\right]^{'} x = 0.$